

吴剑雄,张国庆,李宗道,等. 基于自收敛同伦延拓法搜索七自由度机械臂零空间解集[J]. 智能计算机与应用,2024,14(8): 209-219. DOI:10.20169/j.issn.2095-2163.240834

基于自收敛同伦延拓法搜索七自由度机械臂零空间解集

吴剑雄^{1,2}, 张国庆^{1,3}, 李宗道^{1,2}, 李清都^{1,2}

(1 上海理工大学 机器智能研究院, 上海 200093; 2 上海理工大学 健康科学与工程学院, 上海 200093;

3 上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

摘要: 针对七自由度机械臂零空间解集的无穷性,传统数值迭代只能求取单一解,解析法通用性较低,微分映射法精度较低的问题,本文在传统同伦延拓法的基础上采用同伦延拓参数自收敛的方式并加入关节限幅环节以优化延拓空间,并在此基础上,采用余弦函数作为同伦延拓辅助函数为方程组加入扰动。首先,根据改进 DH 参数法得到正运动学变换矩阵;其次,对自收敛同伦延拓法和传统同伦延拓法的求解时效、求解范围、对求解精度的适应性以及迭代限幅对求解的影响进行对比实验;最后,使用球形包围盒法结合加权取解的方式使得机械臂利用搜索到的零空间解集进行避障运动。经实验证明自收敛法的求解时效要优于传统法,加入关节限幅过程后,两种方法的时效性均有提升。

关键词: 七自由度机械臂; 零空间解集; 同伦延拓参数; 关节限幅; 同伦延拓辅助函数; 自收敛同伦延拓法

中图分类号: TP241

文献标志码: A

文章编号: 2095-2163(2024)08-0209-11

Searching the null space solution set of 7-DOF manipulator based on self convergence homotopy continuation method

WU Jianxiong^{1,2}, ZHANG Guoqing^{1,3}, LI Zongdao^{1,2}, LI Qingdu^{1,2}

(1 Institute of Machine Intelligence, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;

2 School of Health Science and Engineering, USST, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

200093, China; 3 School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and

Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: In view of the infinity of the null space solution set of the seven-degree-of-freedom manipulator and the traditional numerical iteration can only obtain a single solution, the analytical method has low versatility, and the differential mapping method has low accuracy. Based on the traditional homotopy continuation method, the self-convergent homotopy continuation parameters and the joint limit are introduced to optimize the continuation space. On this basis, the cosine function is used as a homotopy continuation auxiliary function to add perturbation to the equations. Firstly, the forward kinematics transformation matrix is obtained according to the modified DH parameter method. Then, the solution efficiency, solution range, adaptability to solution accuracy and the influence of joint limit on solution of self-convergence homotopy continuation method and traditional homotopy continuation method are compared. Finally, the spherical bounding box method combined with the method of selecting solutions through weighting is used to make the manipulator use the searched null space solution set to avoid obstacles. Experiments show that the self-convergence method is superior to the traditional method and the efficiency of the two methods is improved after adding the joint limit process.

Key words: seven-degree-of-freedom manipulator; null space solution set; homotopy continuation parameter; joint limit; homotopy continuation auxiliary function; self-convergence homotopy continuation method

0 引言

工业领域、服务领域、医疗领域对机器人的需求不断增长,机械臂的使用最为广泛。传统六自由度机

械臂在应对复杂工作场景时,对其运动学规划的难度较大;七自由度机械臂因存在冗余自由度从而拥有丰富的零空间解集,可以合理利用对应的零空间解集更加灵活的完成任务,对环境有更强的适应能力。

作者简介: 吴剑雄(1999-),男,硕士研究生,主要研究方向:机械臂运动控制;张国庆(1998-),男,硕士研究生,主要研究方向:机械臂运动控制;李宗道(1994-),男,博士研究生,主要研究方向:冗余机械臂双臂协作。

通讯作者: 李清都(1980-),男,博士,教授,主要研究方向:仿生机器人理论与技术,复杂系统的动力学与控制。Email:liqd@usst.edu.cn

收稿日期: 2023-04-27

机械臂的零空间解集是使机械臂末端位姿保持不变的关节角集合^[1-2]。传统的七自由度机械臂零空间解是基于机械臂几何雅克比的零空间投影矩阵,通过积分获得瞬时解,但是积分的过程使得该方法精度难以保证,雅可比的奇异会导致关节速度的突变;数值法方面,常规数值迭代法依赖于迭代初始位置,只能得到一组解,无法充分利用的七自由度机械臂的冗余特性;几何解析法虽然具有精度高的优势,但是不具备通用性^[3-4]。

Artemiadis P、Lee S 等^[5-6]结合关节参数化技术对于七自由度机械臂的几何结构进行分析,得到一种求封闭解析解的计算方法,但缺点是关节参数的选择方式过于繁琐;Moradi H 等^[7]提出了一种最小化臂角零空间自运动的解析方法,分析了肩关节极限的冗余角参数局限性,但是该法仅仅采用了一种零空间自运动轨迹,而七自由度机械臂同一位姿的零空间自运动轨迹存在多个;Shimizu M 等^[8]将臂角作为一维的冗余参数,通过向量几何原理得到将臂角作为变量的解析公式,通过代入不同的臂角得到对应的零空间解,但只能适用于特定构型机械臂。

同伦延拓法是针对数值迭代法对迭代初值依赖较高这一缺点提出的一种数学方法,能确保在给定初值情况下的大范围收敛,通过构造一组同伦映射,利用简单映像的解去追踪复杂映像的解。彭继友等^[9]运用同伦的思想对飞机舱门运动轨迹的非线性方程组进行求解优化;赵斌等^[10]使用同伦法分析了关于轨道电路传输线的二阶偏微分方程;柳伟等^[11]使用同伦延拓法分析了电路方程的 Hopf 分岔点问题;Rahmani A 等^[12]利用同伦延拓方法求解混合并联机器人的非线性解;Milad S A 等^[13]通过 Ostrowski^[14]同伦延拓方法求解低自由度并联机器人的运动学问题,但是 Ostrowski 同伦方法求解串联链式结构机械臂运动学问题的时效性较低;Wu T M^[15]针对三自由度平面机械臂提出了与关节变量相关的同伦辅助函数构造方式,但是只考虑了3个位置分量并没有涉及到姿态量;Tsai L W 等^[16]根据六自由度机械臂的构型分析了同伦延拓方法的收敛性问题,但是六自由度机械臂的零空间解集是有限的,而七自由度机械臂的构型更加复杂且零空间解有无数个。

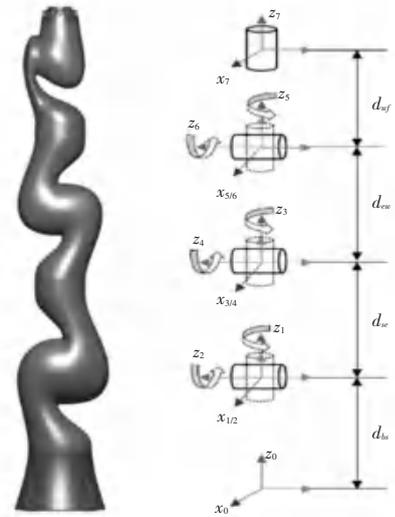
考虑到同伦延拓算法自身适合求解非线性方程组。针对七自由度机械臂的冗余特性以及位姿超越方程的高度非线性,本文采用自收敛的同伦延拓参数结合偏向于扰动功能的余弦函数作为同伦辅助函数,并在迭代过程中加入关节限幅对七自由度机械

臂的零空间解集进行搜索。

1 机械臂正运动学模型构建

本文选取了 KUKA iiwa7 型机械臂作为研究对象。KUKA iiwa7 是一台七自由度协作机器人,有效负载 7 kg,重复定位精度为 0.1 mm,机器重量为 29.5 kg,最大运动范围达到 800 mm。七自由度 KUKA iiwa7 拥有更高的灵活性,适应各种工程应用。

使用 MDH(Modified DH)参数法对机械臂进行正运动学建模,并采用 Matlab Robotics System Toolbox 仿真包搭建机械臂运动学连杆图如图 1 所示。根据相关参数构建机械臂运动学坐标系如图 1 所示。MDH 参数表,见表 1,其中 a_{i-1} 为连杆长度, α_{i-1} 为关节轴线扭转角, d_{i-1} 为连杆偏距, θ_i 为关节角度。



(a) 机械臂实体图

(b) 机械臂连杆图

图 1 运动学连杆图

Fig. 1 Kinematics linkage diagram

表 1 MDH 参数表

Table 1 MDH parameter table

关节 i	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0.340 0	θ_1
2	0	pi/2	0	θ_2
3	0	-pi/2	0.400 0	θ_3
4	0	pi/2	0	θ_4
5	0	-pi/2	0.400 0	θ_5
6	0	pi/2	0	θ_6
7	0	-pi/2	0.126 6	θ_7

改进 DH 法的齐次变换矩阵通式(1):

$$\begin{matrix} \hat{e}_i \\ \hat{c}_i \\ \hat{e}_i \\ \hat{e}_i \end{matrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} d_i \\ \sin \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \hat{u}_i \\ \hat{u}_i \\ \hat{u}_i \\ \hat{u}_i \end{matrix} \quad (1)$$

将连杆变量 θ_i , 连杆常量 $d_i, \alpha_{i-1}, a_{i-1}$ 代入通式 (1), 将得到的矩阵连乘得到式 (2):

$${}^0_7T = {}^0_1T_1^2 T_2^3 T_3^4 T_4^5 T_5^6 T_6^7 T_7^8 \quad (2)$$

将 0_7T 的齐次变换矩阵形式表示为式 (3):

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 & r_2 & r_3 & p_x \hat{u} \\ \hat{e}_4 & r_5 & r_6 & p_y \hat{u} \\ \hat{e}_7 & r_8 & r_9 & p_z \hat{u} \\ \hat{e}_0 & 0 & 0 & 1 \hat{u} \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中, $r_i (i = 1 \sim 9), p_x, p_y, p_z$ 分别为机械臂末端相对于基坐标系的 9 个姿态量与 3 个位置量, 都是关于关节变量 $\theta_i (i = 1 \sim 7)$ 的超越方程。

2 同伦延拓方程组构建

2.1 牛顿迭代

使用牛顿迭代法描述以上位姿方程的求解问题。 θ_{n-1} 为上时刻的迭代更新值, $n = 1$ 时为迭代初值, θ_n 为迭代更新值, 公式 (4); f_{θ_d} 为给定的目标位姿, 公式 (5):

$$\begin{cases} \theta_{n-1} = [\theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots, \theta_{n-7}]^T \\ \theta_n = [\theta_{n_1}, \theta_{n_2}, \dots, \theta_{n_7}]^T \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} f_{\theta_{n-1}} = [p_{x_{n-1}}, p_{y_{n-1}}, p_{z_{n-1}}, (r_1, r_2, \dots, r_9)_{n-1}]^T \\ f_{\theta_d} = [p_{x_d}, p_{y_d}, p_{z_d}, (r_1, r_2, \dots, r_9)_d]^T \end{cases} \quad (5)$$

精度判别式 (6):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{12} (f_{\theta_d}(i) - f_{\theta_{n-1}}(i))^2} \leq accuracy \quad (6)$$

$f_{\theta_{n-1}}$ 会根据每次迭代后的 θ_{n-1} 的值进行更新直至满足精度。

迭代雅可比按照位置以及姿态参数的顺序展开, 式 (7):

$$Jaco = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \frac{\delta p_x}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta p_x}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_4 \frac{\delta p_y}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta p_y}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_7 \frac{\delta p_z}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta p_z}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_0 \frac{\delta r_1}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta r_1}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_4 \frac{\delta r_2}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta r_2}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_7 \frac{\delta r_3}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta r_3}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_0 \frac{\delta r_4}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta r_4}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_4 \frac{\delta r_5}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta r_5}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_7 \frac{\delta r_6}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta r_6}{\delta \theta_7} \hat{u} \\ \hat{e}_0 \frac{\delta r_7}{\delta \theta_1} & \dots & \frac{\delta r_7}{\delta \theta_7} \hat{u} \end{pmatrix} \quad (7)$$

列出关于位姿求解的牛顿迭代式:

$$\theta_n = \theta_{n-1} + SVD(Jaco(\theta_{n-1}))(f_{\theta_d} - f_{\theta_{n-1}}) \quad (8)$$

由于 $Jaco$ 为非方阵, 所以需要使用 SVD

(Singular Value Decomposition) 奇异值分解求其伪逆^[17]。通过奇异值分解将 $Jaco$ 的伪逆分解为两个正交矩阵与对角奇异值倒数矩阵的乘积。

2.2 传统同伦延拓法

设 $f_{\theta_d} - f_{\theta_{n-1}}$ 为 $H_{\theta_{n-1}}$, 同伦延拓参数为 P , 同伦延拓辅助函数为 G_x 。

基于同伦延拓的新目标函数:

$$F_{\theta_{n-1}} = \begin{pmatrix} PH_{\theta_{n-1}} + (1 - P) G_{x_1} \\ \vdots \\ PH_{\theta_{n-2}} + (1 - P) G_{x_2} \\ \vdots \\ PH_{\theta_{n-12}} + (1 - P) G_{x_{12}} \end{pmatrix}, P \in [0, 1] \quad (9)$$

现考虑 3 个特殊位置 $P = 0, P \in (0, 1), P = 1$ 。

当 $P = 0$ 时, $F_{\theta_{n-1}} = G_x$;

当 $P \in (0, 1)$ 时, $F_{\theta_{n-1}} = PH_{\theta_{n-1}} + (1 - P) G_x$;

当 $P = 1$ 时, $F_{\theta_{n-1}} = H_{\theta_{n-1}}$ 。

因此, 令 P 从 0 递增至 1 时, $F_{\theta_{n-1}} = 0$ 的解从 $G_x = 0$ 的解变为 $H_{\theta_{n-1}} = 0$ 的解。

对于非冗余机械臂而言, 其同一位姿对应的关节角组合是有限的 (六自由度机械臂一般有 8~16 个)。同伦延拓方法的要求偏向于获得所有对应的零空间解。此时, 同伦辅助函数的作用更倾向于引导。低自由度机械臂的同伦辅助函数有牛顿函数和定点函数, 如式 (10)、式 (11) 所示:

$$G_x = G_{\theta_{n-1}} = H_{\theta_{n-1}} - H_{\theta_0} \quad (10)$$

$$G_x = G_{\theta_{n-1}} = A(\theta_{n-1} - \theta_0) \quad (11)$$

将 (10) 代入 (9) 得到式 (12):

$$F_{\theta_{n-1}} = \begin{pmatrix} PH_{\theta_{n-1}} + (1 - P)(-H_{\theta_{01}}) \\ \vdots \\ PH_{\theta_{n-2}} + (1 - P)(-H_{\theta_{02}}) \\ \vdots \\ PH_{\theta_{n-12}} + (1 - P)(-H_{\theta_{012}}) \end{pmatrix}, P \in [0, 1] \quad (12)$$

虽然 $H_{\theta_{n-1}} - H_{\theta_0} = 0$ 是必定有解的, 但是由于七自由度机械臂的正运动学方程是高度非线性的, 所以 P 在递增至 1 的过程中, $H_{\theta_{n-1}} + (1 - P)(-H_{\theta_0}) = 0$ 不满足线性性质, 导致该方程不一定有解, 且七自由度机械臂位姿方程的计算复杂度很高。

将 (11) 代入 (9) 得到式 (13):

$$F_{\theta_{n-1}} = \begin{pmatrix} PH_{\theta_{n-1}} + (1 - P) A_i(\theta_{n-1_i} - \theta_{0_i}) \\ \vdots \\ PH_{\theta_{n-2}} + (1 - P) A_i(\theta_{n-1_i} - \theta_{0_i}) \\ \vdots \\ PH_{\theta_{n-12}} + (1 - P) A_i(\theta_{n-1_i} - \theta_{0_{12}}) \end{pmatrix}, P \in [0, 1] \quad (13)$$

参数 A_i 的选择比较困难,过大的参数 A_i 可能会导致延拓过程中的物理解释受机械臂连杆长度等影响变的不合理;过小的参数 A_i 可能会因为奇点导致延拓失败。

对于冗余七自由度机械臂而言,其同一位姿对应的关节角组合有无数种,所以对于同伦延拓的要求更偏向于尽可能在短的时间内获得更多的零空间解。这时,同伦辅助函数的作用更倾向于扰动。

本文使用与关节变量无关的余弦函数为延拓加入扰动,通过改变余弦函数值在解空间中形成不同的搜索路径,从而获得更多的零空间解。单次余弦函数的计算量,式(6)的超越函数要低很多,从而迭代搜索的速度更快。由于齐次变换矩阵的旋转参数部分为单位正交矩阵,矩阵参数的绝对值小于等于1。因此采用余弦函数构成的 G_x 在为同伦方程加入扰动的同时,其有界初等函数的性质也可以在同伦延拓过程中保证较好的物理解释性和计算时效性。本文同伦辅助函数如式(14)所示,其中 x_0 在区间 $[0, \pi]$ 中按给定步长递增变化。

$$G_{x_i} = \cos x_0, (i = 1 \cdots 12) \quad (14)$$

其中, x_0 在迭代过程中按步长递增于 $[0, \pi]$ 。

本文构造的传统同伦方程组如式(15)所示:

$$F_{\theta_{n-1}} = \begin{Bmatrix} PH_{\theta_{n-1,1}} + (1-P)\cos x_0 \\ PH_{\theta_{n-1,2}} + (1-P)\cos x_0 \\ \vdots \\ PH_{\theta_{n-1,12}} + (1-P)\cos x_0 \end{Bmatrix}, P \in [0,1] \quad (15)$$

精判别式(16):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{12} (F_{\theta_{n-1}}(i) - 0)^2} \leq accuracy \quad (16)$$

传统同伦延拓法的雅可比矩阵 $Jaco_{new}$:

$$Jaco_{new} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial F_1(\theta_1 \cdots \theta_7)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(\theta_1 \cdots \theta_7)}{\partial \theta_7} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{12}(\theta_1 \cdots \theta_7)}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial F_{12}(\theta_1 \cdots \theta_7)}{\partial \theta_7} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_7 \end{matrix} \quad (17)$$

基于传统同伦延拓的牛顿迭代公式(18):

$$\theta_n = \theta_{n-1} + SVD(Jaco_{new}(\theta_{n-1}))(0 - F_{\theta_{n-1}}) \quad (18)$$

传统同伦延拓方法的同伦延拓参数 P 独立于待求解方程组,需要逐步递增至1。实验证明,如果 P 的步长过小会导致计算时间过长,步长过大会导致延拓不充分,得到的有效非重复解数量下降,合理的步长选择为0.1。

将迭代步长设置为0.1,递增过程中求解每个 P 值对应的方程组的迭代最大次数设置为5时,传统同伦延拓法的求解路径如图2所示。通过改变同伦延拓辅助函数值 x_0 ,进而搜索到非线性方程组解空间的其他区域。

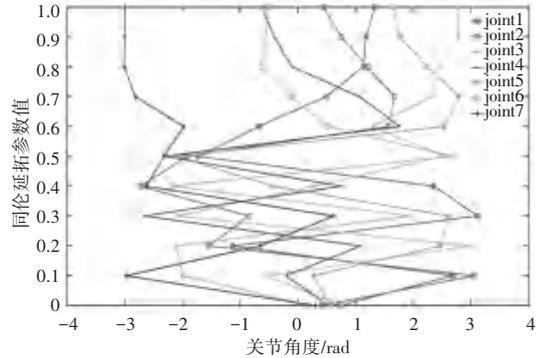


图2 传统同伦延拓法求解路径

Fig. 2 Solution path of traditional homotopy continuation method 迭代步骤

步骤1 设置迭代初始关节角;

步骤2 在 $[0, \pi]$ 范围内递增 x_0 ,生成同伦延拓辅助函数值 G_x ,设置同伦延拓参数 P 的初始值为0;

步骤3 以给定步长递增同伦延拓参数 P ;

步骤4 求解本次同伦延拓参数值对应的方程组,如果 P 已经递增至1,则执行步骤6,否则执行步骤5;

步骤5 判断 $\sqrt{\sum_{i=1}^{12} (F_{\theta_{n-1}}(i) - 0)^2} \leq accuracy$ 和最大迭代次数限制,如果精度满足或超过最大迭代次数则将步得到的 θ_n 作为迭代初值返回步骤3;

步骤6 判断 $\sqrt{\sum_{i=1}^{12} (F_{\theta_{n-1}}(i) - 0)^2} \leq accuracy$,如果精度满足则一次求解结束。

2.3 自收敛同伦延拓法

由于传统法的延拓参数 P 只起到引导延拓路径的作用,应用于七自由度机械臂的同伦法更偏向于为方程组添加扰动,所以在迭代过程中,通过改变同伦延拓参数 P 的初始值来设置延拓路径的起点,延拓参数 P 作为一维变量跟随迭代的方式增强了算法的随机性和灵活性。为了保证路径终点为方程组的解,需设置同伦延拓变量 P 的收敛目标值为1。

$F_{\theta_{n-1}}$ 也要增加一项 $P_{\theta_{n-1}} - 1$,驱使同伦延拓参数 P 收敛至1,从而使延拓路径终点到达目标点,式(19):

$$F_{\theta_{n-1}, P_{n-1}} = \begin{bmatrix} P_{n-1} H_{\theta_{n-1_1}} + (1 - P_{n-1}) G_{x_1} \\ P_{n-1} H_{\theta_{n-1_2}} + (1 - P_{n-1}) G_{x_2} \\ \vdots \\ P_{n-1} H_{\theta_{n-1_{12}}} + (1 - P_{n-1}) G_{x_{12}} \\ P_{n-1} - 1 \end{bmatrix}, P \in [0, 1] \quad (19)$$

θ_n 和 θ_{n-1} 要增加一项关于 P 的迭代递推关系, 见式 (20):

$$\begin{cases} (\theta_{n-1}, P_{n-1}) = [\theta_{n-1_1}, \dots, \theta_{n-1_7}, P_{n-1}]^T \\ (\theta_n, P_n) = [\theta_{n_1}, \dots, \theta_{n_7}, P_n]^T \end{cases} \quad (20)$$

精度判别式 $\sqrt{\sum_{i=1}^{13} (F_{\theta_{n-1}, P_{n-1}}(i) - 0)^2} \leq accuracy$

12×7 雅可比矩阵 $Jaco_{new}$ 添加一维关于 P 的偏导, 变为 13×8 的雅可比矩阵。

自收敛同伦延拓法的雅可比矩阵:

$$Jaco_{my_new} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\theta_1 \dots \theta_7, P)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial F_1(\theta_1 \dots \theta_7, P)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial F_1(\theta_1 \dots \theta_7, P)}{\partial P} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{12}(\theta_1 \dots \theta_7, P)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial F_{12}(\theta_1 \dots \theta_7, P)}{\partial \theta_7} & \frac{\partial F_{12}(\theta_1 \dots \theta_7, P)}{\partial P} \\ \frac{\partial P}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P}{\partial \theta_7} & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

基于自收敛同伦延拓的迭代公式 (22):

$$\theta_n, P_n = \theta_{n-1}, P_{n-1} + SVD(Jaco_{my_new}(\theta_{n-1}, P_{n-1}))(0 - F_{\theta_{n-1}, P_{n-1}}) \quad (22)$$

在迭代过程中, 由于超越方程中存在的三角函数属于周期函数, 传统法和自收敛法在迭代过程中均会出现 θ_n 超出 $[-\pi, \pi]$ 的情况, 导致搜索空间冗余。在每一次迭代更新时, 先将 θ_n 限幅在 $[-\pi, \pi]$ 的范围内, 然后再更新至 θ_{n-1} 。如果不加入限幅过程, 传统法和自收敛法获得重复解的概率均会增大, 从而对算法时效产生影响。

自收敛同伦延拓法对一组位姿的求解路径如图 3 所示。

迭代步骤

步骤 1 设置迭代初始关节角;

步骤 2 在 $[0, \pi]$ 范围内递增 x_0 , 生成同伦延拓辅助函数 G_x ;

步骤 3 以给定步长设置同伦延拓变量 P 的迭

代初值, 生成延拓路径起点;

步骤 4 迭代求解本次同伦延拓变量值对应的方程组;

步骤 5 判断 *accuracy*, 如果精度满足则一次求解结束; 否则执行步骤 6;

步骤 6 对 θ_n 限幅后更新至 θ_{n-1} , 返回步骤 4。

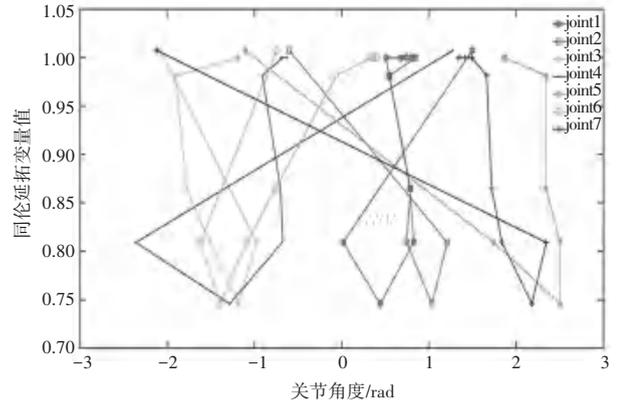


图 3 自收敛同伦延拓法求解路径

Fig. 3 Solution path of self-convergence homotopy continuation method

3 仿真实验

3.1 求解时效

在相同的最大迭代次数和迭代初始位置下, 将自收敛同伦延拓法与传统同伦延拓法的求解时间进行比较, 并在 MATLAB 平台上求取 300 个随机末端位姿的 300 组有效解。当末端笛卡尔位姿求解精度设置为 $1e^{-12}$ 时, 分别得出自收敛法与传统法求解这 300 组随机位姿方程组的最大时间和最小时间, 最大求解时间差和最小求解时间差以及平均时间差, 求解时间对比图如图 4 所示。

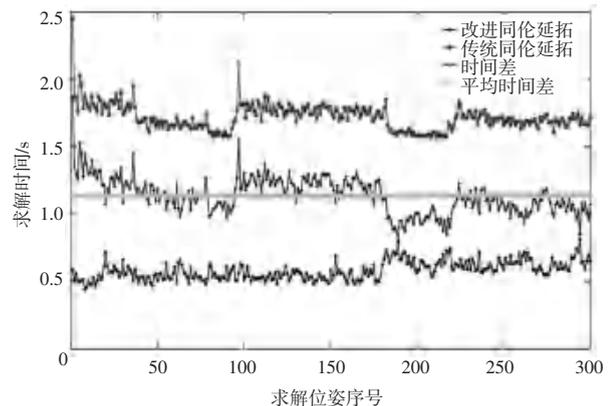


图 4 求解时间对比图

Fig. 4 Comparison diagram of solution efficiency

求解时间对比表, 见表 2。从表 2 可以看出自收敛同伦延拓法在求解时效性上要比传统法优越,

原因在于传统同伦延拓法必须按照设定的步长求解,并且对于每一个 P 值对应的目标函数都需要迭代到一定的精度或超过最大迭代次数才能递增 P , 进行下一次迭代。在一轮求解中必须当 P 递增至 1 时才能得到对应的解。传统法在一次求解中的总迭代次数为 50 次,会造成时间的损耗和误差的叠加。自收敛同伦延拓法采用了 P 参与迭代的方式,可以使 P 以较快的速度收敛至 1,且求解误差的叠加次数较少。

表 2 求解时间对比表

	传统法	自收敛法
最大求解时间	2.456	0.812 3
最小求解时间	1.571	0.443 3
最大求解时间差	1.643 7	
最小求解时间差	1.127 7	

随机选取 6 个目标位姿并分别对其求解 20 组有效解,自收敛法同伦参数的收敛变化图如图 5 所示。大多数情况下, P 在迭代 20 次以内便收敛至 1。

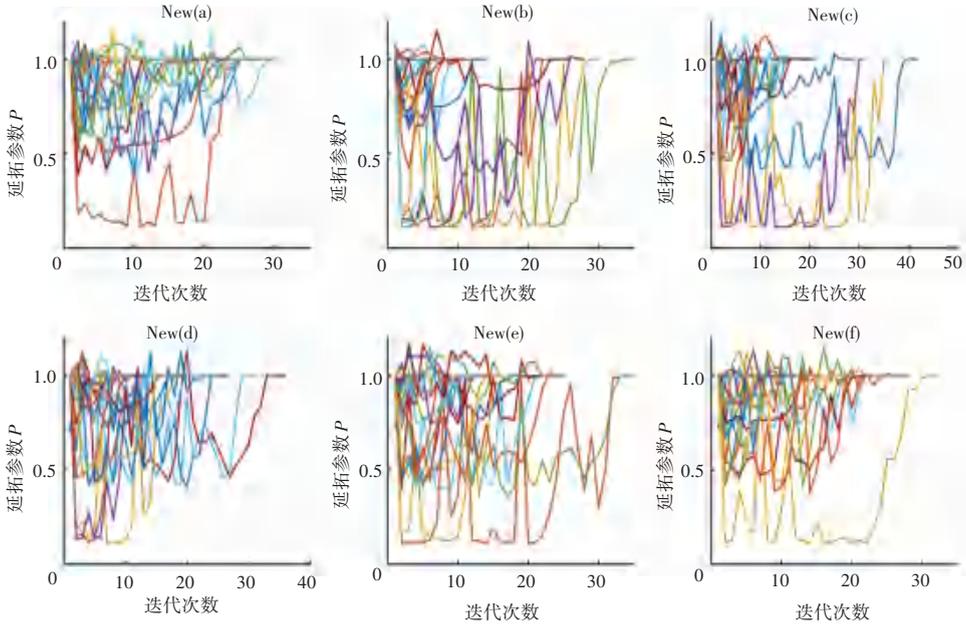


图 5 自收敛法同伦参数的收敛变化图

Fig. 5 Convergence variation diagram of homotopy variables of self-convergence method

3.2 求解范围

使用 Matlab Robotics System Toolbox 仿真包测试自收敛同伦延拓法对机械臂零空解集的搜索范围。在机械臂工作空间内选取 6 组位姿,当末端笛

卡尔位姿求解精度设置为 $1e^{-12}$ 时,1 500 组零空间解如图 6 所示,1 500 组零空间解时效见表 3。从图 6 可以看出,该法所得到的肘部冗余圆的完整性较高。

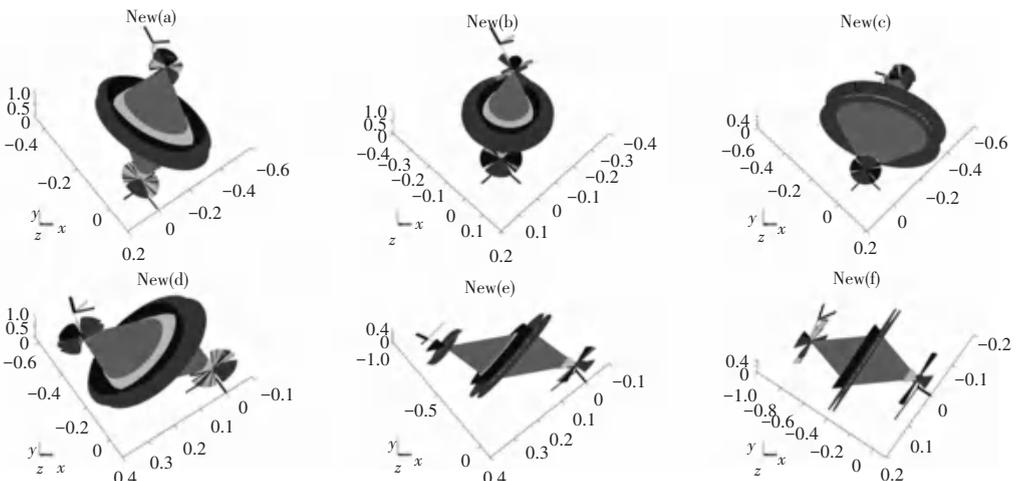


图 6 1 500 组零空间解

Fig. 6 1 500 sets of null-space solutions

表 3 1 500 组零空间解时效
Table 3 Efficiency of 1 500 sets of null space solutions

编号	求解位姿				求解时间/s
(a)	-0.897 5	0.365 2	-0.247 3	-0.478 7	5.577 5
	0.375 7	0.339 5	-0.862 3	-0.383 7	
	-0.230 9	-0.866 8	-0.442 0	0.768 5	
	0	0	0	1	
(b)	-0.486 2	-0.821 6	-0.297 5	-0.296 2	4.514 9
	0.360 7	0.121 5	-0.924 7	-0.302 7	
	0.796 0	-0.556 9	0.237 3	1.076 7	
	0	0	0	1	
(c)	-0.004 1	0.970 2	0.242 4	-0.461 5	4.179 3
	0.767 2	0.158 5	-0.621 5	-0.313 9	
	-0.641 4	0.183 4	-0.744 9	0.004 6	
	0	0	0	1	
(d)	-0.702 6	-0.681 5	-0.204 7	0.282 7	4.093 3
	0.455 9	-0.210 2	-0.864 8	-0.554 8	
	0.546 4	-0.700 9	0.458 4	0.883 3	
	0	0	0	1	
(e)	0.311 1	-0.926 0	0.213 8	0.327 7	3.826 8
	0.112 1	-0.187 6	-0.975 8	-0.800 2	
	0.943 7	0.327 5	0.045 4	0.545 4	
	0	0	0	1	
(f)	-0.523 9	0.678 9	-0.514 4	0.016 0	5.587 9
	0.836 6	0.296 6	-0.460 5	-0.831 9	
	-0.160 1	-0.671 6	-0.723 4	0.339 7	
	0	0	0	1	

3.3 求解精度适应性

使用 Matlab Robotics System Toolbox 仿真包对传统同伦延拓法与自收敛同伦延拓法对精度的适应程度进行仿真对比实验。

分别改变末端笛卡尔位姿的求解精度为 $1e^{-12}$ 、 $1e^{-14}$ 。采用传统同伦延拓法对 6 组末端位姿分别求解 350 次, 仿真实验得到传统法在不同精度下的求解时效见表 4。

表 4 传统法在不同精度下的求解时效
Table 4 Solution efficiency of traditional method under different accuracy

精度	有效解数	求解时间	精度	有效解数	求解时间/s
$1e^{-14}$	25	1.518 4 s	$1e^{-12}$	128	1.512 3
	37	1.502 6		206	1.496 4
	35	1.498 2		193	1.492 0
	33	1.514 7		168	1.514 2
	29	1.512 8		164	1.509 4
	27	1.516 9		141	1.506 0

传统法在 $1e^{-14}$ 精度下的解空间示意图如图 7 所示, 当末端笛卡尔位姿求解精度设置为 $1e^{-14}$ 时, 传统同伦延拓法得到的解空间的完整度出现了一定的缺失。

经过仿真实验, 自收敛法在不同精度下的求解时效见表 5。从表 5 看出自收敛同伦延拓法在不同的求解精度下, 其求解时效相对稳定。

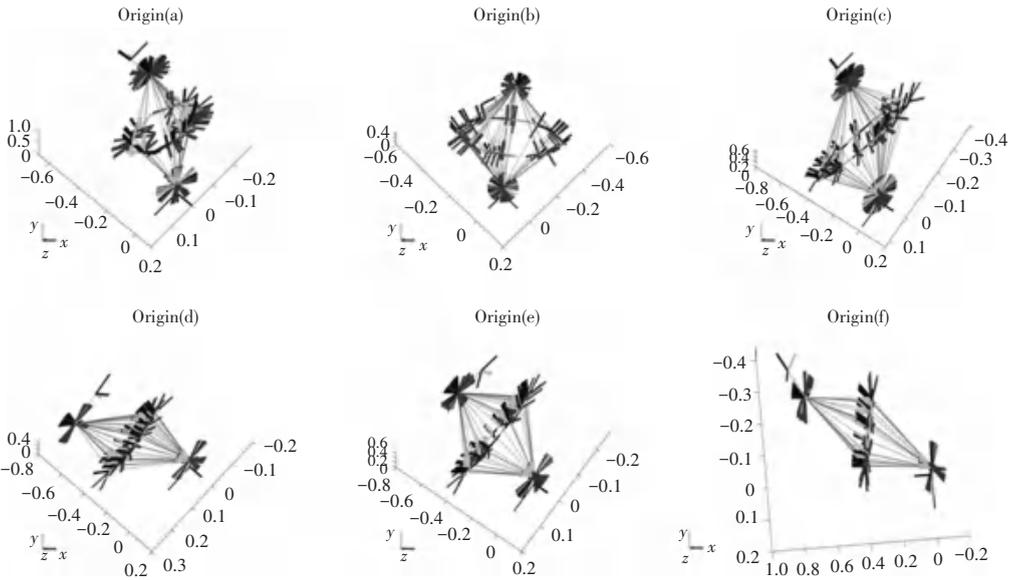


图 7 传统法在 $1e^{-14}$ 精度下的解空间示意图

Fig. 7 Solution space diagram of traditional method under $1e^{-14}$ accuracy

表 5 自收敛法在不同精度下的求解时效

Table 5 Solution efficiency of self-convergence method under different accuracy

精度	有效解数	求解时间/s	精度	有效解数	求解时间/s
$1e^{-14}$	259	0.593 5	$1e^{-12}$	259	0.584 6
	265	0.483 0		265	0.467 9
	272	0.557 0		273	0.556 9
	269	0.531 4		269	0.521 6
	271	0.518 2		271	0.508 7
	267	0.608 4		267	0.588 8

当末端笛卡尔位姿求解精度设置为 $1e^{-14}$ 时, 自收敛同伦延拓法得到的解空间示意图如图 8 所示。

对比传统同伦延拓法求得的解空间示意图 7, 自收敛法求得的解空间要更加完整, 用时也相对较短。

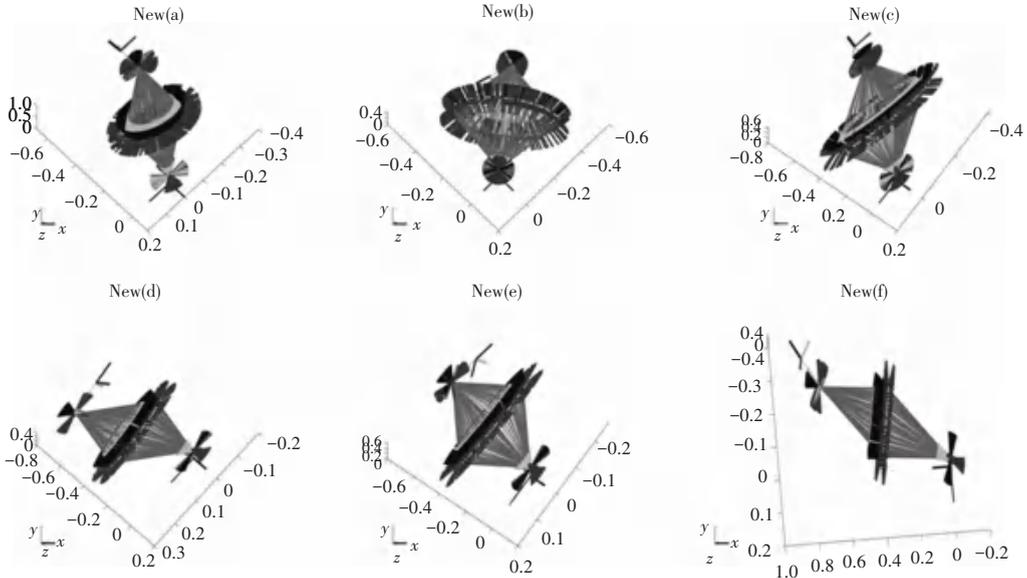


图 8 自收敛法在 $1e^{-14}$ 精度下的解空间示意图

Fig. 8 Solution space diagram of self-convergence method under $1e^{-14}$ accuracy

3.4 关节限幅对求解时效的影响

为了验证迭代更新中 θ_n 限幅与否对求解收敛性的影响, 设置末端笛卡尔位姿求解精度为 $1e^{-14}$, 分别选取的 6 组位姿求解 350 次, 对限幅 θ_n 与不限

幅 θ_n 的求解时效进行对比, 可见在不对 θ_n 进行限幅的情况下, 传统法与自收敛法的求解时效均降低了, 见表 6、表 7。

表 6 自收敛法在加入限幅与不加入限幅的求解时效对比

Table 6 Comparison of solution efficiency of self-convergence method with and without limiting

加入限幅的自收敛同伦延拓法			不加入限幅的自收敛同伦延拓法		
精度	有效解数	求解时间/s	精度	有效解数	求解时间/s
$1e^{-14}$	259	0.593 5	$1e^{-14}$	176	0.938 5
	265	0.483 0		207	0.685 6
	272	0.557 0		189	0.818 1
	269	0.531 4		190	0.788 7
	271	0.518 2		192	0.769 3
	267	0.608 4		178	0.879 0

表 7 传统法在加入限幅与不加入限幅的求解时效对比

Table 7 Comparison of solution efficiency of traditional method with and without limiting

加入限幅的传统同伦延拓法			不加入限幅的传统同伦延拓法		
精度	有效解数	求解时间/s	精度	有效解数	求解时间/s
$1e^{-14}$	139	1.396 3	$1e^{-14}$	25	1.518 4
	204	1.389 6		37	1.502 6
	181	1.380 2		35	1.498 2
	176	1.389 5		33	1.514 7
	189	1.380 4		29	1.512 8
	133	1.397 0		27	1.516 9

3.5 零空间避障轨迹

使用 Matlab Robotics System Toolbox 仿真包验证机械臂是否可以利用所求的零空间解集避障。

使用基于抛物线的平滑梯形法为机械臂末端规划出一条笛卡尔空间中的速度平滑梯形曲线^[18], 如图 9 所示, 总规划时间跨度为 1, 插补采样时间跨度为 0.01。

态不变的直线运动任务, 使得末端笛卡尔空间的速度遵循平滑梯形曲线。在机械臂的运动过程中分别添加一个和两个障碍物, 并通过包络机械臂连杆半径的球形包围盒碰撞检测算法识别障碍物^[18]。

识别到障碍物后, 针对关节角变化较小以及连杆距离障碍物中心点距离较短的条件在解集中加权取解^[19-20]。在解集中找到一组关节角最小化, 式 (23):

$$a \sum_{i=1}^7 (link_i to O)_{\min} + b \sqrt{\sum_{i=1}^7 (\theta_{current_i} - \theta_{previous_i})^2} \quad (23)$$

其中, a, b 为权重参数; O 为障碍物中心点; $link_i$ 为机械臂连杆上距离障碍物中心点最近的点。

机械臂末端从起始笛卡尔位置 $[0 \ 0 \ 1.266 \ 6]$ 直线运动到 $[-0.526 \ 6 \ 0 \ 0.740 \ 0]$, 要求机械臂在运动过程中保持姿态不变, 无碰撞体的轨迹如图 10 所示, 有一个碰撞体的轨迹如图 11 所示, 有两个碰撞体的轨迹如图 12 所示, 可以看出在存在碰撞体时, 机械臂在保持运动要求的同时以加权方式选取较优解进行自运动, 绕开了障碍物。

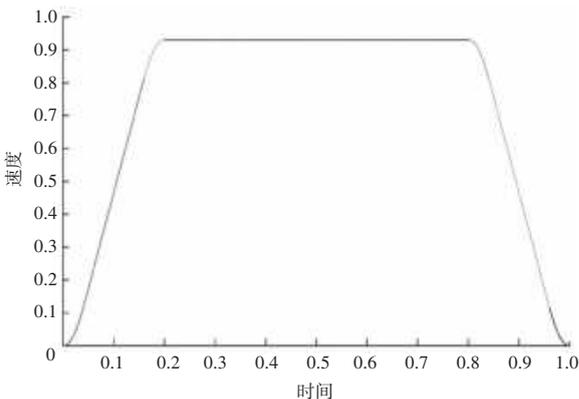


图 9 平滑梯形曲线

Fig. 9 Smooth trapezoidal curve

在笛卡尔空间中为机械臂末端设定一个保持姿

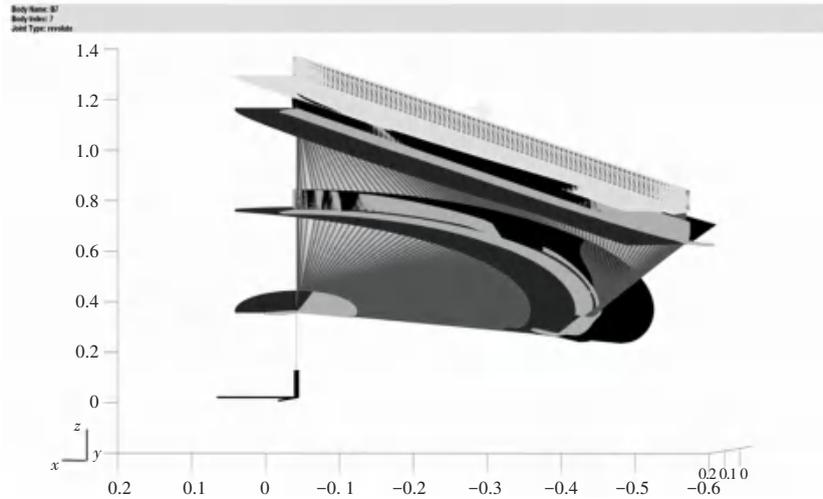


图 10 无碰撞体下的轨迹
Fig. 10 Trajectory without collision

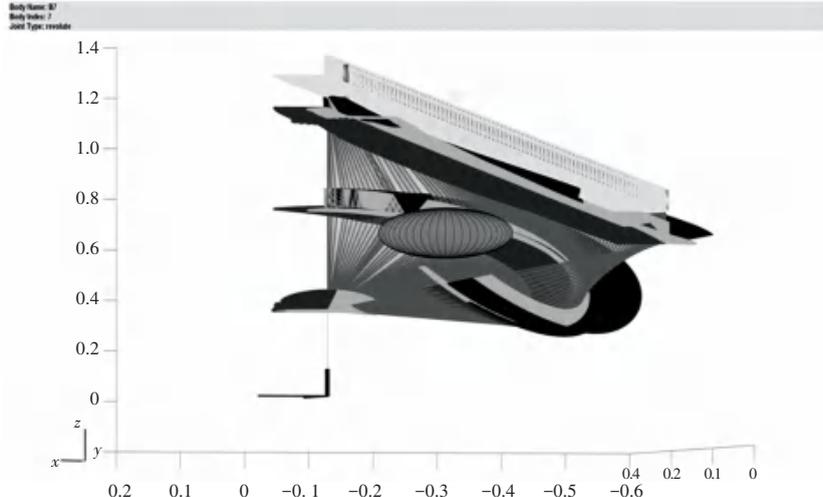


图 11 存在一个碰撞体下的轨迹
Fig. 11 Trajectory under one collision bodies

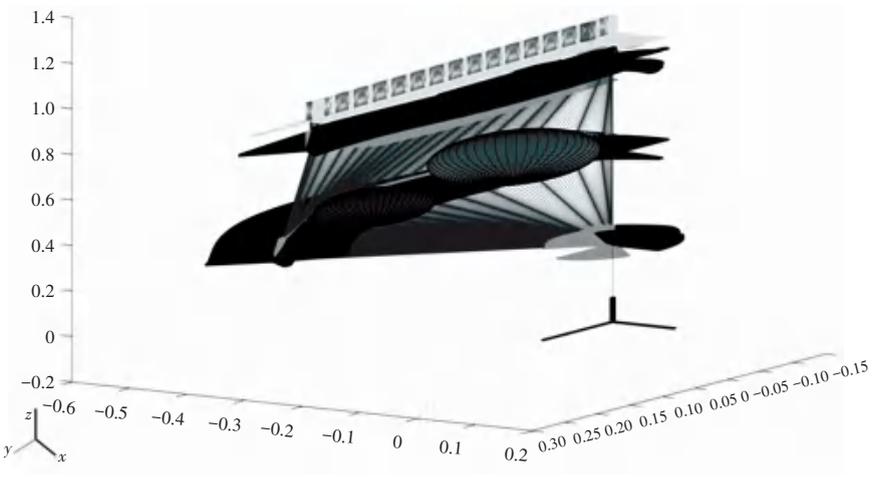


图 12 存在两个碰撞体下的轨迹
Fig. 12 Trajectory under two collision bodies

4 结束语

通过延拓变量自收敛的方式,可以以更高的时效、更高的精度获得七自由度机械臂的零空间解集;在加入迭代限幅过程后,均会降低获得无效重复解的概率,达到提升解集求解时效的目的;改变由独立于关节变量的余弦函数构成的同伦辅助函数可以有效地对解空间进行搜索。

本文通过条件加权的方式在所求零空间解集中进行避障选解,实现了机械臂的零空间避障,也证明了本文使用自收敛同伦延拓法获取零空间解集的方案具备一定的工程意义。

参考文献

- [1] HO C K, KING C T. Automating the learning of inverse kinematics for robotic arms with redundant dofs [J]. arXiv preprint arXiv: 2202.07869, 2022.
- [2] SHIMABUKURO Y, GUSHI S, MATAYOSHI J, et al. Self-feeding assistive 7-DoF robotic arm simulator using solving method of inverse kinematics [J]. IEEE Transactions on Electronics, Information and Systems, 2020, 140(9): 1040-1049.
- [3] DOU R, YU S, LI W, et al. Inverse kinematics for a 7-DOF humanoid robotic arm with joint limit and end pose coupling [J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 169: 104637.
- [4] TANG G, SHENG J, WU C, et al. Kinematic analysis of seven-degree-of-freedom exoskeleton rehabilitation manipulator [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2022, 19(1): 84-96.
- [5] WANG Y, ARTEMIADIS P. Closed-form inverse kinematic solution for anthropomorphic motion in redundant robot arms [J]. Advances in Robotics & Automation, 2013, 2(110): 2.
- [6] LEE S, BEJCZY A K. Redundant arm kinematic control based on parameterization [C]//Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation. IEEE, 1991: 458-465.
- [7] MORADI H, LEE S. Joint limit analysis and elbow movement minimization for redundant manipulators using closed form method [C]// Proceedings of Advances in Intelligent Computing: International Conference on Intelligent Computing. Berlin, Heidelberg: IEEE, 2005: 423-432.
- [8] SHIMIZU M, KAKUYA H, YOON W K, et al. Analytical inverse kinematics for 7 DOF redundant manipulators with joint limits [J]. Journal of the Robotics Society of Japan, 2010, 25(4): 606-617.
- [9] 彭继友, 杭鲁滨, 刘安心, 等. 基于同伦连续法的飞机舱门提升机构轨迹综合 [J]. 机械传动, 2023, 47(2): 53-59.
- [10] 赵斌, 张友鹏, 石磊. 基于同伦分析法的轨道电路暂态仿真分析 [J]. 控制工程, 2016, 23(9): 1432-1435.
- [11] 柳伟, 顾伟, 徐荆州. 基于预测-校正的同伦延拓法追踪高维 Hopf 分岔点研究 [J]. 电力自动化设备, 2009, 29(9): 65-69.
- [12] RAHMANI A, FAROUGH S. Application of a novel elimination algorithm with developed continuation method for nonlinear forward kinematics solution of modular hybrid manipulators [J]. Robotica, 2020, 38(11): 1963-1983.
- [13] MILAD S A, AGHIL Y K, SAHBA I, et al. Kinematic analysis of a 3-UPU parallel robot using the Ostrowski-Homotopy Continuation [C]// Proceedings of 2016 24th Iranian Conference on Electrical Engineering (ICEE). IEEE, 2016: 1306-1311.
- [14] BASHARDOUST A S, KOMA A Y, IRAVANIMANESH S, et al. Direct kinematics analysis of the Tip-Tilt-Piston parallel manipulator by Ostrowski Homotopy continuation method [J]. 2016. DOI: 10.13140/RG.2.2.31660.46721.
- [15] WU T M. Searching all the roots of inverse kinematics problem of robot by homotopy continuation method [J]. Journal of Applied Sciences, 2005, 5(4): 666-673.
- [16] TSAI L W, MORGAN A P. Solving the kinematics of the most general six- and five-degree-of-freedom manipulators by continuation methods [J]. Journal of Mechanical Design, 1985, 107(2): 189-200.
- [17] 蒋新松. 机器人学导论 [M]. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1994.
- [18] 朱小利. 基于 MATLAB-Robotics 的七自由度机器人运动轨迹规划仿真 [J]. 河北北方学院学报(自然科学版), 2019, 35(11): 10-15.
- [19] 朱战霞, 靖飒, 仲剑飞, 等. 基于碰撞检测的空间冗余机械臂避障路径规划 [J]. 西北工业大学学报, 2020, 38(1): 183-190.
- [20] 夏晶, 马宏伟, 王海荣, 等. 基于零空间的冗余机械臂轨迹有效性判断方法 [J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2019, 47(4): 25-31.